

# EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)  
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos  
2002

2.ª FASE  
VERSÃO 1

## PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

---

### VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.

V.S.F.F.

435.V1/1

---

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

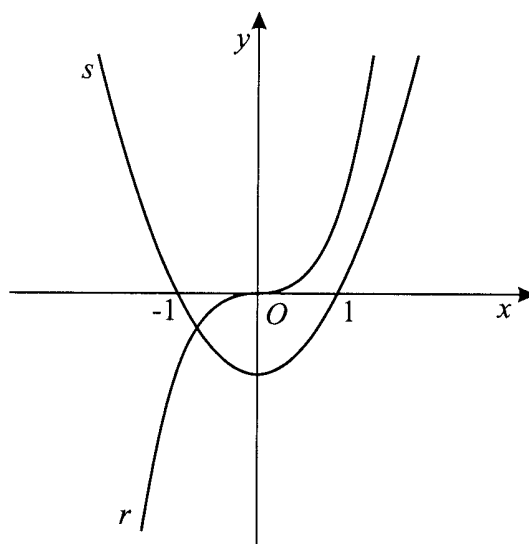
- O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui cinco questões de resposta aberta, algumas delas subdivididas em alíneas, num total de dez.

**Na página 11 deste enunciado encontra-se um formulário que, para mais fácil utilização, pode ser destacado do resto da prova, em conjunto com esta folha.**

## Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Na figura estão parcialmente representados os gráficos de duas funções polinomiais,  $r$  e  $s$ .



Qual dos seguintes conjuntos pode ser o domínio da função  $\frac{r}{s}$  ?

(A)  $\mathbb{R}$

(B)  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

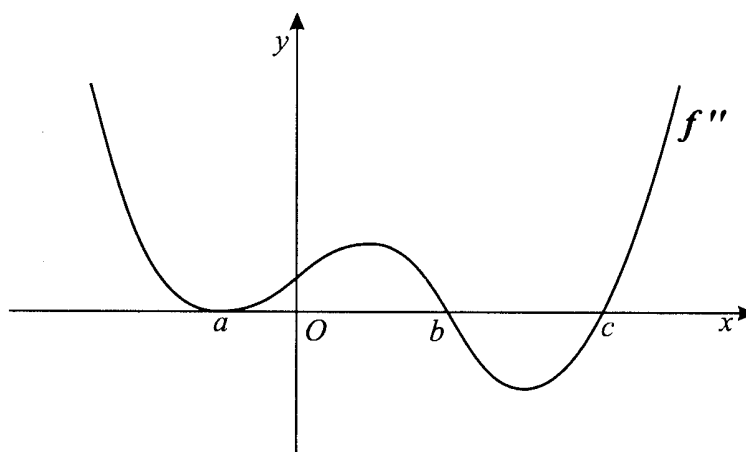
(C)  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

(D)  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$

V.S.F.F.

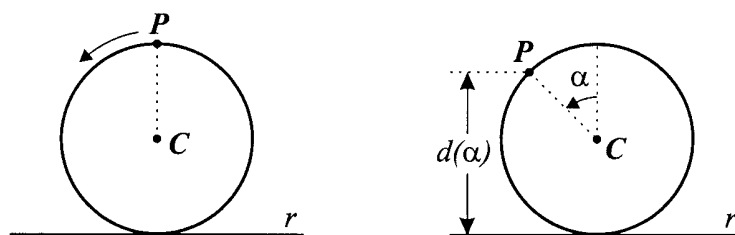
435.V1/3

2. Seja  $f$  uma função de domínio  $\mathbb{R}$ .  
Na figura está representada parte do gráfico de  $f''$ , **segunda derivada** da função  $f$ .



Relativamente ao gráfico da **função  $f$** , qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) O ponto de abscissa  $a$  é um ponto de inflexão.  
(B) O ponto de abscissa  $c$  é um ponto de inflexão.  
(C) A concavidade está voltada para baixo no intervalo  $[0, b]$ .  
(D) A concavidade está sempre voltada para cima.
3. Considere uma circunferência de centro  $C$  e raio 1, tangente a uma recta  $r$ .  
Um ponto  $P$  começa a deslocar-se sobre a circunferência, no sentido indicado na figura. Inicialmente, o ponto  $P$  encontra-se à distância de 2 unidades da recta  $r$ .



Seja  $d(\alpha)$  a distância de  $P$  a  $r$ , após uma rotação de amplitude  $\alpha$ .

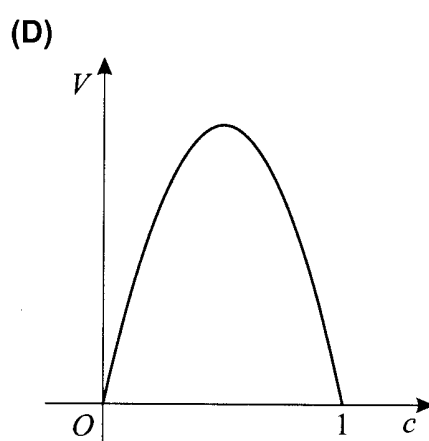
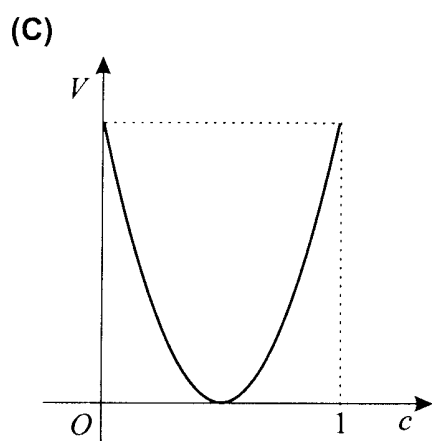
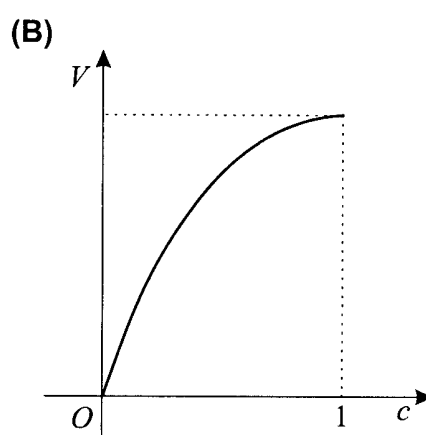
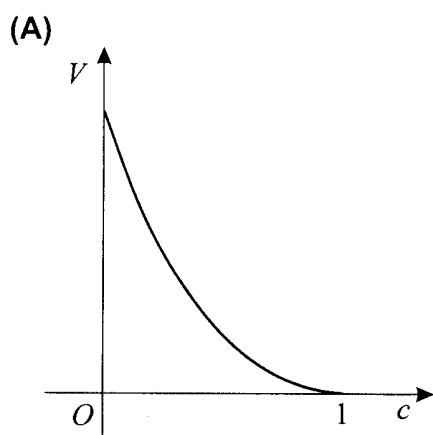
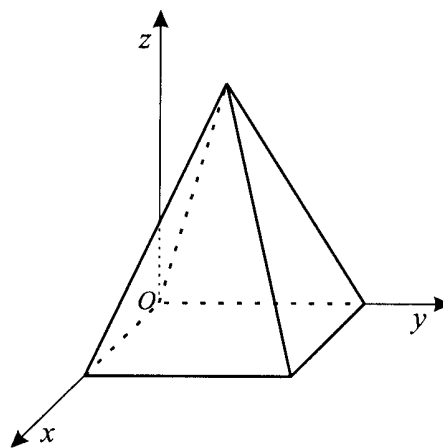
Qual das igualdades seguintes é verdadeira para qualquer número real positivo  $\alpha$ ?

- (A)  $d(\alpha) = 1 + \cos \alpha$                       (B)  $d(\alpha) = 2 + \sin \alpha$   
(C)  $d(\alpha) = 1 - \cos \alpha$                       (D)  $d(\alpha) = 2 - \sin \alpha$

4. Considere, num referencial o. n.  $Oxyz$ , uma pirâmide quadrangular regular, de altura 1, cuja base está contida no plano  $xOy$ .

Para cada  $c \in [0, 1]$ , seja  $V(c)$  o volume da parte da pirâmide constituída pelos pontos cuja cota é **superior ou igual** a  $c$ .

Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função  $V$ ?



V.S.F.F.

435.V1/5

5. Pretende-se dispor, numa prateleira de uma estante, seis livros, dois dos quais são de Astronomia. De quantas maneiras diferentes o podemos fazer, de tal forma que os dois primeiros livros, do lado esquerdo, sejam os de Astronomia?

(A) 24                      (B) 36                      (C) 48                      (D) 60

6. Na figura A está representado um dado equilibrado, cuja planificação se apresenta esquematizada na figura B.

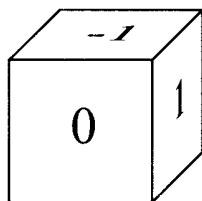


Figura A

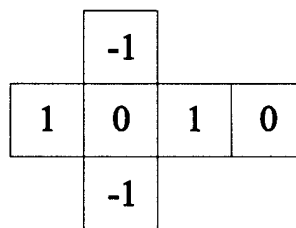


Figura B

Lança-se este dado duas vezes.

Considere as seguintes variáveis aleatórias, associadas a esta experiência:

$X_1$ : número saído no primeiro lançamento.

$X_2$ : quadrado do número saído no segundo lançamento.

$X_3$ : soma dos números saídos nos dois lançamentos.

$X_4$ : produto dos números saídos nos dois lançamentos.

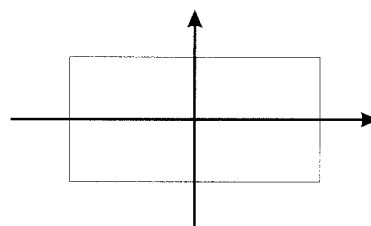
Uma destas quatro variáveis tem a seguinte distribuição de probabilidades:

Valores da variável	-1	0	1
Probabilidades	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$

Qual delas?

(A)  $X_1$                       (B)  $X_2$                       (C)  $X_3$                       (D)  $X_4$

7. Na figura está representado um rectângulo, de comprimento 4 e largura 2, centrado na origem do plano complexo.



Seja  $z$  um número complexo qualquer, cuja imagem geométrica está situada no interior do rectângulo.

Qual dos seguintes números complexos tem também, necessariamente, a sua imagem geométrica no interior do rectângulo?

(A)  $z^{-1}$                       (B)  $\bar{z}$                       (C)  $z^2$                       (D)  $2z$

## Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

**Atenção:** quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, considere

$$z_1 = 1 + i \quad (i \text{ designa a unidade imaginária}).$$

- 1.1. Determine os números reais  $b$  e  $c$  para os quais  $z_1$  é raiz do polinómio  $x^2 + bx + c$ .

- 1.2. Seja  $z_2 = \text{cis } \alpha$ .

Calcule o valor de  $\alpha$ , pertencente ao intervalo  $[0, 2\pi]$ , para o qual  $z_1 \times \overline{z_2}$  é um número real negativo ( $\overline{z_2}$  designa o conjugado de  $z_2$ ).

2. Considere as funções  $f$  e  $g$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definidas por

$$f(x) = \frac{1}{3} + 2e^{1-x} \quad g(x) = 2 \sin x - \cos x$$

- 2.1. Utilize métodos exclusivamente analíticos para resolver as duas alíneas seguintes:

- 2.1.1. Estude a função  $f$  quanto à existência de assíntotas paralelas aos eixos coordenados.

- 2.1.2. Resolva a equação  $f(x) = g(\pi)$ , apresentando a solução na forma  $\ln(ke)$ , onde  $k$  representa um número real positivo.  
( $\ln$  designa logaritmo de base  $e$ )

- 2.2. Recorrendo à calculadora, determine as soluções inteiras da inequação  $f(x) > g(x)$ , no intervalo  $[0, 2\pi]$ . Explique como procedeu.

V.S.F.F.

435.V1/7

3. Uma nova empresa de refrigerantes pretende lançar no mercado embalagens de sumo de fruta, com capacidade de **dois litros**. Por questões de *marketing*, as embalagens deverão ter a forma de um **prisma quadrangular regular**.

- 3.1. Mostre que a área total da embalagem é dada por

$$A(x) = \frac{2x^3 + 8}{x}$$

( $x$  é o comprimento da aresta da base, em  $dm$ )

**Nota:** recorde que  $1 \text{ litro} = 1 dm^3$



- 3.2. Utilizando métodos exclusivamente analíticos, mostre que existe um valor de  $x$  para o qual a área total da embalagem é mínima e determine-o.

4. Seja  $f$  uma função de domínio  $\mathbb{R}$ , com derivada finita em todos os pontos do domínio, e **crescente**.

Sejam  $a$  e  $b$  dois quaisquer números reais. Considere as rectas  $r$  e  $s$ , tangentes ao gráfico de  $f$  nos pontos de abscissas  $a$  e  $b$ , respectivamente.

Prove que as rectas  $r$  e  $s$  **não** podem ser perpendiculares.

5. Um baralho de cartas completo é constituído por cinquenta e duas cartas, repartidas por quatro naipes de treze cartas cada: Espadas, Copas, Ouros e Paus. Cada naipe tem **três figuras**: Rei, Dama e Valete.

- 5.1. Retirando, ao acaso, seis cartas de um baralho completo, qual é a probabilidade de, entre elas, haver um e um só Rei? Apresente o resultado na forma de dízima, com aproximação às milésimas.

- 5.2. De um baralho completo extraem-se ao acaso, sucessivamente e sem reposição, duas cartas. Sejam  $E_1$ ,  $C_2$  e  $F_2$  os acontecimentos:

$E_1$ : sair Espadas na primeira extracção;

$C_2$ : sair Copas na segunda extracção;

$F_2$ : sair uma figura na segunda extracção.

Sem utilizar a fórmula da probabilidade condicionada, indique o valor de  $P((F_2 \cap C_2) | E_1)$ . Numa pequena composição, com cerca de dez linhas, explicita o raciocínio que efectuou. O valor pedido deverá resultar **apenas** da interpretação do significado de  $P((F_2 \cap C_2) | E_1)$ , no contexto da situação descrita.

**FIM**



## COTAÇÕES

**Grupo I .....63**

Cada resposta certa .....	+9
Cada resposta errada.....	- 3
Cada questão não respondida ou anulada .....	0

**Nota:**

Um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

**Grupo II .....137**

1. ....	21
1.1. ....	10
1.2. ....	11

2. ....	49
2.1. ....	33
2.1.1. ....	16
2.1.2. ....	17
2.2. ....	16

3. ....	27
3.1. ....	10
3.2. ....	17

4. ....	10
---------	----

5. ....	30
5.1. ....	15
5.2. ....	15

**TOTAL .....200**

**V.S.F.F.**

435.V1/9

---

## Formulário

### Áreas de figuras planas

Losango:  $\frac{Diagonal\ maior \times Diagonal\ menor}{2}$

Trapézio:  $\frac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \times Altura$

Polígono regular:  $Semiperímetro \times Apótema$

Círculo:  $\pi r^2$  ( $r$  – raio)

### Áreas de superfícies

Área lateral de um cone:  $\pi r g$   
( $r$  – raio da base;  $g$  – geratriz)

Área de uma superfície esférica:  $4 \pi r^2$   
( $r$  – raio)

### Volumes

Prisma:  $Área\ da\ base \times Altura$

Cilindro:  $Área\ da\ base \times Altura$

Pirâmide:  $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Cone:  $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Esfera:  $\frac{4}{3} \pi r^3$  ( $r$  – raio)

### Trigonometria

$$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$

### Complexos

$$(\rho \operatorname{cis} \theta) \cdot (\rho' \operatorname{cis} \theta') = \rho \rho' \operatorname{cis} (\theta + \theta')$$

$$\frac{\rho \operatorname{cis} \theta}{\rho' \operatorname{cis} \theta'} = \frac{\rho}{\rho'} \operatorname{cis} (\theta - \theta')$$

$$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis} (n \theta)$$

$$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis} \frac{\theta + 2k\pi}{n}, k \in \{0, \dots, n-1\}$$

### Progressões

Soma dos  $n$  primeiros termos de uma

Prog. Aritmética:  $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica:  $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

### Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' \cdot e^u$$

$$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

### Limites notáveis

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$