

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO
12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos
 2003

2.ª FASE

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Grupo I63

Cada resposta certa +9
 Cada resposta errada -3
 Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II137

1. 21
 1.1. 11
 1.2. 10

2. 26
 2.1. 10
 2.2. 16

3. 42
 3.1. 14
 3.2. 14
 3.3. 14

4. 20
 4.1. 10
 4.2. 10

5. 12

6. 16

TOTAL 200

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Grupo I

Deverão ser anuladas todas as questões com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todas as questões em que o examinando dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	1	2	3	4	5	6	7
Versão 1	C	B	A	B	D	A	C
Versão 2	B	C	D	A	B	C	C

Na tabela seguinte indicam-se os pontos a atribuir, no primeiro grupo, em função do número de respostas certas e do número de respostas erradas.

Resp. erradas Resp. certas	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	9	6	3	0	0	0	0	
2	18	15	12	9	6	3		
3	27	24	21	18	15			
4	36	33	30	27				
5	45	42	39					
6	54	51						
7	63							

Grupo II

Critérios gerais

1. A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro, não negativo, de pontos.
2. Se, numa alínea em que a respectiva resolução exija cálculos e/ou justificações, o examinando se limitar a apresentar o resultado final, deverão ser atribuídos zero pontos a essa alínea.
3. Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor classificador adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.

4. Existem alíneas cuja cotação está subdividida pelas etapas que o examinando deve percorrer para as resolver.
 - 4.1. Em cada etapa, a cotação indicada é a máxima a atribuir.
 - 4.2. Caso a resolução da etapa esteja incompleta, ou contenha incorrecções, cabe ao classificador decidir a cotação a atribuir a essa etapa, tendo em conta o grau de incompletude e/ou a gravidade dos erros cometidos. Por exemplo:
 - erros de contas ocasionais devem ser penalizados em um ponto;
 - erros graves, que revelem desconhecimento de conceitos, regras ou propriedades, devem ser penalizados em, pelo menos, metade da cotação da etapa.
 - 4.3. No caso de o examinando cometer um erro numa das etapas, as etapas subsequentes devem merecer a respectiva cotação, desde que o grau de dificuldade não tenha diminuído, e o examinando as execute correctamente, de acordo com o erro que cometeu.
 - 4.4. Caso o examinando cometa, numa etapa, um erro que diminua o grau de dificuldade das etapas subsequentes, cabe ao classificador decidir a cotação máxima a atribuir a cada uma destas etapas. Em particular, se, devido a um erro cometido pelo examinando, o grau de dificuldade das etapas seguintes diminuir significativamente, a cotação máxima a atribuir a cada uma delas não deverá exceder metade da cotação indicada.
 - 4.5. Pode acontecer que o examinando, ao resolver uma questão, não percorra explicitamente todas as etapas previstas nos critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.
5. Existem alíneas em que estão previstos alguns erros que o examinando pode cometer. Para cada caso, é indicada a cotação a atribuir. O examinando pode, contudo, utilizar um processo não contemplado nos critérios e/ou cometer um erro não previsto. Cabe ao classificador adaptar as referências dadas a todas as situações não previstas.
6. Se, na resolução de uma alínea, o examinando utilizar simbologia, ou escrever uma expressão, inequivocamente incorrecta do ponto de vista formal (por exemplo, se escrever o símbolo de igualdade onde deveria estar o símbolo de equivalência), deve ser penalizado em um ponto, na cotação total a atribuir a essa alínea. Esta penalização não se aplica no caso em que tais incorrecções ocorram apenas em etapas cotadas com 0 (zero) pontos.
7. Se, na resolução de uma alínea, o examinando não respeitar uma eventual instrução, relativa ao método a utilizar (por exemplo, se o enunciado vincular o examinando a uma resolução analítica, sem calculadora, e o examinando a utilizar), a etapa da resolução em que se dá o referido desrespeito bem como todas as subsequentes que dela dependam devem ser cotadas com 0 (zero) pontos.
8. Tudo o que o examinando escrever fora de contexto e que não resulte de trabalho anterior (por exemplo, num exercício de probabilidades, a escrita de uma fracção que não tenha nada a ver com o problema, ou, num exercício de estudo da monotonia de uma função, a apresentação de um quadro fora do contexto) deve ser cotado com 0 (zero) pontos. Todas as etapas subsequentes que dependam do que o examinando escreveu fora de contexto devem ser igualmente cotadas com 0 (zero) pontos.

Critérios específicos

Para cada item são apresentados:

- a cotação total do item;
- para cada processo de resolução apresentado, uma subdivisão da cotação total em cotações parcelares;
- exemplos de possíveis respostas dos examinandos, com a respectiva cotação a atribuir, devidamente explicada.

1.1. 11

$$1 + \sqrt{3}i = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{3} \text{ (ver nota 1)..... } 3 (1+2)$$

$$\sqrt[4]{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{3} = \sqrt[4]{2} \operatorname{cis} \frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{4}, k \in \{0, 1, 2, 3\} \text{ (ver nota 2)..... } 3 (1+1+1)$$

Escrever as quatro raízes $(\sqrt[4]{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{12}, \sqrt[4]{2} \operatorname{cis} \frac{7\pi}{12},$

$$\sqrt[4]{2} \operatorname{cis} \frac{13\pi}{12} \text{ e } \sqrt[4]{2} \operatorname{cis} \frac{19\pi}{12}) \text{ (ver nota 3)..... } 5 (1 + 4 \times 1)$$

Notas:

1. A subdivisão da cotação desta etapa, indicada entre parêntesis, corresponde a: 1 ponto pela escrita do módulo; 2 pontos pela escrita do argumento. Não se exige a apresentação de cálculos intermédios.
2. A subdivisão da cotação desta etapa, indicada entre parêntesis, corresponde a: 1 ponto pela escrita de $\sqrt[4]{2}$; 1 ponto pela escrita de $\operatorname{cis} \frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{4}$; 1 ponto pela escrita de $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ (o examinando também poderá escrever $k \in \mathbb{Z}$, desde que, depois, use os valores adequados de k).
3. A subdivisão da cotação desta etapa, indicada entre parêntesis, corresponde a: 1 ponto pela escrita correcta do módulo comum a todas as raízes e 1 ponto por cada um dos quatro argumentos (que deverão ser apresentados na forma mais simplificada possível).

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$$w = 1 + \sqrt{3}i \quad |w| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \quad \theta = \frac{\pi}{3} \quad w = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}$$

$$\sqrt[4]{2} \operatorname{cis} \frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{4}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3\}$$

$$k = 0, \quad w_0 = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{4} = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{12}$$

$$k = 1, \quad w_1 = 2 \operatorname{cis} \frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi}{4} = 2 \operatorname{cis} \frac{7\pi}{12}$$

$$k = 2, \quad w_2 = 2 \operatorname{cis} \frac{\frac{\pi}{3} + 4\pi}{4} = 2 \operatorname{cis} \frac{13\pi}{12}$$

$$k = 3, \quad w_3 = 2 \operatorname{cis} \frac{\frac{\pi}{3} + 6\pi}{4} = 2 \operatorname{cis} \frac{15\pi}{12}$$

$$\text{Cotação a atribuir: } 3(1 + 2) + 3(1 + 1 + 1) + 3(0 + 1 + 1 + 1 + 0) = 9$$

Exemplo 2

$$1 + \sqrt{3}i = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{3} \quad \sqrt[4]{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{4}$$

$$k = 0, \quad \sqrt[4]{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{12}$$

$$k = 1, \quad \sqrt[4]{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}$$

$$k = 2, \quad \sqrt[4]{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{12} + \pi$$

$$k = 3, \quad \sqrt[4]{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{12} + \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{Cotação a atribuir: } 3(1 + 2) + 3(1 + 1 + 1^{(*)}) + 2(1 + 1 + 0 + 0 + 0) + (-1)^{(**)} = 7$$

(*) Apesar de não ter escrito $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, considera-se que tal está implícito na etapa seguinte.

(**) Erro formal de escrita: falta de parêntesis nos argumentos.

Exemplo 3

$$m = \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}$$

$$\sqrt[4]{\sqrt{3} \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}} =$$

$$= \sqrt[4]{\sqrt{3} \operatorname{cis} \frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{4}} =$$

$$= \sqrt[4]{\sqrt{3}} \operatorname{cis} \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$$

Cotação a atribuir: $2(0 + 2) + 2(1 + 1 + 0) + 0(0 + 0 + 0 + 0 + 0) + (-1)^{(*)} = 3$

(*) Erros formais de escrita: $m = \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}$ e falta de parêntesis em $\sqrt[4]{\sqrt{3}} \operatorname{cis} \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$

1.2. 10

Representar o ponto A 2

Representar o ponto B 3

Desenhar o triângulo $[AOB]$ 1

Concluir que o coeficiente da parte imaginária de z é 4 3

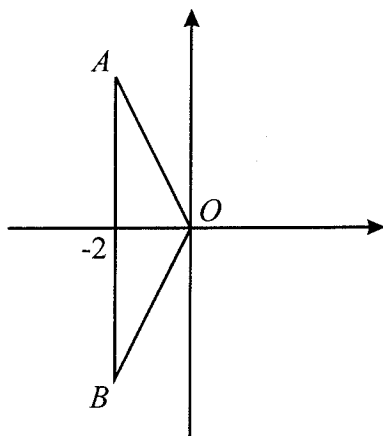
Escrever z na forma algébrica 1

Nota:

Se o examinando não respeitar a indicação, expressa no enunciado, de que deve representar o triângulo $[AOB]$, deve ser atribuída a cotação de 0 (zero) pontos à sua resposta.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

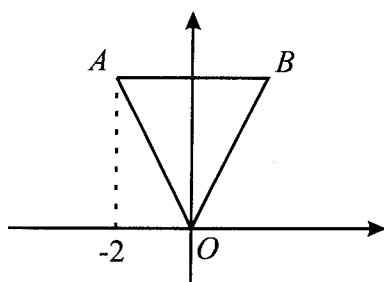


$$A = \frac{b \times h}{2} = 8 \quad \frac{\overline{AB} \times 2}{2} = 8 \Leftrightarrow \overline{AB} = 8 \quad \frac{\overline{AB}}{2} = 4$$

$$z = (-2, 4i)$$

$$\text{Cotação a atribuir: } 2 + 3 + 1 + 3 + 0 = 9$$

Exemplo 2



$$\operatorname{Re}(x + yi) = -2$$

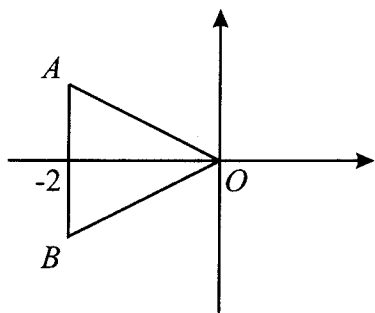
$$x = -2$$

$$A = \frac{b \times h}{2} = 8 \quad \frac{4 \times h}{2} = 8 \Leftrightarrow 2h = 8 \Leftrightarrow h = 4$$

$$z = -2 + 4i$$

$$\text{Cotação a atribuir: } 2 + 0 + 1 + 3 + 1 = 7$$

Exemplo 3



$$A = \frac{b \times h}{2} = 8 \quad \frac{4 \times h}{2} = 8 \Leftrightarrow 4h = 4 \Leftrightarrow h = 1$$

$$z = -2 + i$$

$$\text{Cotação a atribuir: } 2 + 3 + 1 + 0 + 1 = 7$$

Contagem do número de anos decorridos desde o início de
1864 até ao final de 2003 (140 anos) **(ver nota 1)**3

$p(140) \approx 9,8$ (milhões de habitantes) **(ver notas 2, 3, 4 e 5)**7 (4+3)

Notas:

1. Se o examinando indicar 139, em vez de 140, deve ser cotado com 1 dos 3 pontos previstos para esta etapa.
2. A subdivisão da cotação desta etapa, indicada entre parêntesis, corresponde a: 4 pontos pela escrita de $p(140)$; 3 pontos pelo cálculo do respectivo valor.
3. Se o examinando não apresentar o resultado arredondado às décimas, ou não arredondar correctamente, deverá ser penalizado em 1 ponto.
4. Se o examinando não respeitar a indicação, expressa no enunciado, de conservação de um mínimo de três casas decimais, nos cálculos intermédios, deverá ser penalizado em 1 ponto. Note-se, no entanto, que não se exige a apresentação de cálculos intermédios.
5. Se o examinando efectuar a contagem do número de anos entre as duas datas do enunciado e calcular a imagem, por meio de p , desse número, mas existir evidência de que não reconhece que o valor pedido é essa imagem, deve ser penalizado em 6 pontos, nesta etapa. Se, por aplicação desta norma, a cotação final da etapa for negativa, esta cotação deve ser convertida em 0 (zero) pontos.
6. Se o examinando não efectuar a contagem do número de anos entre as duas datas do enunciado e calcular $p(2003)$, deve ser atribuída a cotação máxima de 1 ponto à totalidade da sua resposta.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$$2003 - 1864 = 139$$

$$p(139) \approx 9,8$$

$$\text{Cotação a atribuir: } 1^{(*)} + 7(4 + 3) = 8$$

(*) Ver a nota 1, acima.

Exemplo 2

$$t = 139 \rightarrow 2003 \rightarrow 6,3$$

$$\text{Cotação a atribuir: } 1^{(*)} + 6(4 + 2^{(**)}) = 7$$

(*) Ver a nota 1, acima.

(**) Erro ocasional de contas: o examinando não adicionou 3,5 ao quociente obtido.

Exemplo 3

$$2003 - 1864 = 139$$

$$p(139) = 3,5 + \frac{6,8}{1 + 12,8 e^{-0,036 \times 139}} \approx 9,762$$

$$p(0) = 3,5 + \frac{6,8}{1 + 12,8 e^{-0,036 \times 0}} \approx 3,993$$

$$9,762 + 3,993 \approx 13,8$$

Logo, no ano 1864, em Portugal, havia 3,993 milhões de habitantes e como até ao ano 2003, a população aumentou 9,762 milhões de habitantes, então no fim do ano 2003, existirão 13,8 milhões de habitantes.

Cotação a atribuir: $1 + 1(4 + 3 - 6^{(*)}) = 2$

(*) Ver a nota 5, atrás.

Exemplo 4

$$p(2003) = 3,5 + \frac{6,8}{1 + 12,8 e^{-0,036 \times 2003}} \approx 10,3$$

Cotação a atribuir: $1^{(*)}$

(*) Ver a nota 6, atrás.

2.2. 16

Equacionar o problema: $p(t) = 3,7$ 3

Resolver a equação 10

$$3,5 + \frac{6,8}{1 + 12,8 e^{-0,036 t}} = 3,7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{33}{12,8} = e^{-0,036 t} \quad (\text{ou equivalente}) \dots\dots\dots 5$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{33}{12,8}\right) = -0,036 t \quad (\text{ou equivalente}) \dots\dots\dots 3$$

$$t \approx -26,307 \dots\dots\dots 2$$

Conclusão (Ano 1837) (**ver nota**) 3

Nota

Se a resposta ao problema for 1838 (erro derivado de um arredondamento indevido), deverá ser atribuído 1 dos 3 pontos previstos para a conclusão.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$$3,5 + \frac{6,8}{1 + 12,8 e^{-0,036 t}} = 3,7 \Leftrightarrow \frac{6,8}{1 + 12,8 e^{-0,036 t}} = 0,2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6,8 = 0,2(1 + 12,8 e^{-0,036 t}) \Leftrightarrow 6,8 = 0,2 + 2,56 e^{-0,036 t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6,6 = 2,56 e^{-0,036 t} \Leftrightarrow 2,578 = e^{-0,036 t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2,578 = \frac{1}{e^{0,036 t}} \Leftrightarrow e^{0,036 t} = \frac{1}{2,578} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln 0,388 = 0,036 t \quad t \approx 10,8 \text{ anos}$$

Cotação a atribuir: $3 + 8(5 + 3 + 0^{(*)}) + 0 = 11$

(*) O examinando comete um erro, na última passagem, e não respeita a indicação de conservação de um mínimo de três casas decimais (o valor de t é um valor intermédio).

Exemplo 2

$$3,5 + \frac{6,8}{1 + 12,8 e^{-0,036t}} = 3,7 \Leftrightarrow 3,5 + 6,8 = 3,7(1 + 12,8 e^{-0,036t}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10,3 = 3,6 + 47,36 e^{-0,036t} \Leftrightarrow 10,3 - 3,6 = 47,36 e^{-0,036t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{6,7}{47,36} = e^{-0,036t} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{6,7}{47,36}\right) = -0,036t$$

$$t \approx 54,324 \quad 1864 + 54 = 1918$$

Cotação a atribuir: $3 + 9(2^{(*)}) + 3 + 2 + 1^{(**)} = 13$

(*) O examinando comete um erro grave, pelo que deve ser penalizado em 3 dos 5 pontos previstos para esta etapa - ver critério geral 4.2.

(**) Conclusão correcta, face ao valor obtido para t . No entanto, o grau de dificuldade diminuiu bastante.

Exemplo 3

$$3,5 + \frac{6,8}{1 + 12,8 e^{-0,036t}} = 3,7 \Leftrightarrow \frac{6,8}{1 + 12,8 e^{-0,036t}} = 0,2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6,8 = 0,2(1 + 12,8 e^{-0,036t}) \Leftrightarrow 6,8 = 0,2 + 2,56 e^{-0,036t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6,6 = 2,56 e^{-0,036t} \Leftrightarrow 2,578 = e^{-0,036t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln 2,578 = e^{-0,036t} \Leftrightarrow 2,578 = -0,036t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{2,578}{0,036} \Leftrightarrow t = 71,611$$

$$\text{Ano: } 1864 + 72 = 1936$$

Cotação a atribuir: $3 + 5(5 + 0 + 0^{(*)}) + 1^{(**)} = 9$

(*) O examinando comete um erro muito grave (de sinal).

(**) Conclusão errada, que se deve a um arredondamento indevido (ver a nota atrás).

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \dots\dots\dots 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \text{sen } x}{x} \dots\dots\dots 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \text{sen } x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{x} + \frac{\text{sen } x}{x} \right) \dots\dots\dots 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{x} \right) = 1 \dots\dots\dots 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\text{sen } x}{x} \right) = 1 \dots\dots\dots 2$$

$$f'(0) = 2 \dots\dots\dots 1$$

Notas:

1. Se o examinando desrespeitar o pedido e calcular $f'(0)$ utilizando apenas as regras de derivação, a cotação a atribuir à sua resposta deverá ser de 0 (zero) pontos.

2. Se, no cálculo de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \text{sen } x}{x}$, o examinando não explicitar a forma como levanta a indeterminação, as quatro últimas etapas devem ser cotadas com 0 (zero) pontos. Portanto, a cotação máxima a atribuir a uma tal resposta é de 5 pontos.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos**Exemplo 1**

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \text{sen } x - 0 - \text{sen } 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \text{sen } x}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

Cotação a atribuir: $2 + 3 + 0 + 1^{(*)} + 2 + 1 = 9$

(*) Diminuiu o grau de dificuldade (ver critério geral 4.4).

Exemplo 2

$$f'(x) = 1 + \cos x \quad f'(0) = 1 + 1 = 2$$

Cotação a atribuir: 0^(*)

(*) Ver a nota 1, atrás.

Exemplo 3

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

Cotação a atribuir: 2 + 3 + 4 + 0 + 2 + 1 = 12

Exemplo 4

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x} = 2$$

Cotação a atribuir: 2 + 3 + 0^(*) + 0^(*) + 0^(*) + 0^(*) = 5

(*) Ver a nota 2, atrás.

Exemplo 5

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{x} + \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) = 2 \end{aligned}$$

Cotação a atribuir: 2 + 3 + 4 + 2 + 2 + 1 = 14

3.2. 14

Determinar a primeira derivada de f	2
Determinar a segunda derivada de f (ver nota 1)	2
Determinar os zeros da segunda derivada de f (ver nota 2)	4 (1+1+2)
Indicar a variação do sinal da segunda derivada de f (ver notas 3 e 4).....	4
Indicar os sentidos das concavidades do gráfico de f (ver nota 3)	1
Evidenciar a existência de pontos de inflexão (ver nota 3)	1

Notas:

- Se existir evidência de que o examinando pretende determinar a segunda derivada de f , a cotação mínima a atribuir às duas primeiras etapas é de 2(1+1) pontos. Se o examinando tiver calculado correctamente a primeira derivada e existir evidência de que pretende determinar a segunda derivada, a cotação mínima a atribuir às duas primeiras etapas é de 3(2+1) pontos.
- A subdivisão dos 4 pontos em 1+1+2 corresponde a:


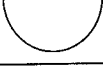

Evidenciar a intenção de determinar os zeros da segunda derivada de f	1
Evidenciar o conhecimento da expressão geradora dos zeros da segunda derivada de f (não é, contudo, necessário explicitar essa expressão)	1
Indicar os zeros da segunda derivada de f	2
- O examinando pode indicar a variação do sinal da segunda derivada e os sentidos das concavidades do gráfico, bem como evidenciar a existência de pontos de inflexão, através de um quadro.
- Se o quadro apresentado pelo examinando não estiver de acordo com o domínio da função, referido no enunciado como sendo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, deverão ser atribuídos 0 (zero) pontos a esta etapa.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$$f'(x) = 1 + \cos x \quad f''(x) = \sin x$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pi$$

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		π		$\frac{3\pi}{2}$
$f''(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$			p.i.		p.i.		



Cotação a atribuir: $2 + 1 + 4(1 + 1 + 2)^{(*)} + 4^{(*)} + 1^{(*)} + 1^{(*)} = 13$

(*) Ver critério geral 4.3.

Exemplo 2

$$f'(x) = 1 + \cos x \quad f''(x) = -\sin x$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$
$f''(x)$		+	0	-	
$f(x)$			p.i.		



Cotação a atribuir: $2 + 2 + 1(1 + 0 + 0) + 0 + 1^{(*)} + 1^{(*)} = 7$

(*) Ver critério geral 4.3.

Exemplo 3

$$f'(x) = 1 + \cos x \quad f''(x) = -\sin x$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

x	$-\infty$	0		π	$+\infty$
$f''(x)$		0	-	0	+
$f(x)$		p.i.		p.i.	

Cotação a atribuir: $2 + 2 + 4(1 + 1 + 2) + 0^{(*)} + 1^{(**)} + 1^{(**)} = 10$

(*) Ver a nota 4, atrás.

(**) Ver critério geral 4.3.

$$f(x) = x + \cos x \Leftrightarrow \sin x = \cos x \dots\dots\dots 1$$

Resolução da equação $\sin x = \cos x$

$$\text{em } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \quad (\text{ver nota}) \dots\dots\dots 13$$

Nota:

A resolução da equação $\sin x = \cos x$ em $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$ pode ser feita por, pelo menos, três processos:

1.º Processo (apresentação imediata das soluções):

$$\text{Apresentação da solução } \frac{\pi}{4} \dots\dots\dots 4$$

$$\text{Apresentação da solução } \frac{5\pi}{4} \dots\dots\dots 9$$

Por cada valor apresentado que não seja solução da equação, descontar 5 pontos. Se, por aplicação desta norma, a pontuação final da etapa (resolução da equação $\sin x = \cos x$) for negativa, deve ser atribuída a cotação final de 0 (zero) pontos à etapa.

2.º Processo:

$$\sin x = \cos x \Leftrightarrow \sin x = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \dots\dots\dots 2$$

$$x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \vee x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \dots\dots\dots 2$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \dots\dots\dots 2$$

$$x = \frac{\pi}{4} \vee x = \frac{5\pi}{4} \dots\dots\dots 7 (2+5)$$

Por cada valor apresentado que não seja solução da equação, descontar 3 pontos aos pontos obtidos neste último passo $\left(x = \frac{\pi}{4} \vee x = \frac{5\pi}{4} \right)$. Se, por aplicação desta norma, a pontuação final deste último passo for negativa, deve ser atribuída a cotação final de 0 (zero) pontos a este último passo.

3.º Processo:

$$\sin x = \cos x \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1 \dots\dots\dots 3$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \dots\dots\dots 3$$

$$x = \frac{\pi}{4} \vee x = \frac{5\pi}{4} \dots\dots\dots 7 (2+5)$$

Por cada valor apresentado que não seja solução da equação, descontar 3 pontos aos pontos obtidos neste último passo $\left(x = \frac{\pi}{4} \vee x = \frac{5\pi}{4}\right)$. Se, por aplicação desta norma, a pontuação final deste último passo for negativa, deve ser atribuída a cotação final de 0 (zero) pontos a este último passo.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$$f(x) = x + \cos x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + \sin x = x + \cos x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \cos x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \vee x = \frac{5\pi}{4}$$

Cotação a atribuir: $1 + 13(4 + 9) = 14$

Exemplo 2

$$f(x) = x + \cos x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + \sin x = x + \cos x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \cos x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \vee x = -\frac{\pi}{4}$$

Cotação a atribuir: $1 + 0^{(*)} = 1$

(*) 4 pontos (pela apresentação da solução $\frac{\pi}{4}$)

– 5 pontos (pela apresentação do valor $-\frac{\pi}{4}$)

Total: – 1 ponto (que deve ser convertido em 0 pontos).

Exemplo 3

$$f(x) = x + \cos x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + \sin x = x + \cos x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \cos x \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \vee x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee \underbrace{x = \frac{\pi}{2} + x + 2k\pi}_{\text{Equação impossível}}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$k = -1 \rightarrow x = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}$$

$$k = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

$$k = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$$

$$C.S. = \left\{ -\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right\}$$

Cotação a atribuir: $1 + 10(2 + 2 + 2 + 4^{(*)}) = 11$

(*) $2 + 5 - 3 = 4$

4.1. 10

Expressão que dá o número pedido (ver notas 1 e 2)..... 9

Número pedido (ver nota 3) 1

Notas:

1. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da expressão que dá o número pedido, com a respectiva cotação a atribuir. Naturalmente, expressões equivalentes às indicadas deverão receber a mesma cotação.

$2 \times 4!$ (expressão correcta) 9

$4!$ 5

$2!$ 2

$2 \times 2 \times 4!$ 2

$2 \times 4! \times 4!$ 2

${}^6C_2 \times 2 \times 4!$ 1

${}^6C_2 \times 4!$ 1

2. Se a expressão escrita pelo examinando não for uma das indicadas acima, nem equivalente, cabe ao classificador decidir a classificação a atribuir, tomando como referência a lista apresentada. No sentido de a complementar, indicam-se a seguir algumas expressões que devem ser cotadas com 0 (zero) pontos:

$4! \times 4!$ ${}^6A_2 \times 2! \times 4!$ ${}^6C_2 \times {}^6A_4$

3. O ponto relativo a esta etapa só deve ser atribuído se a primeira etapa não tiver sido cotada com 0 (zero) pontos.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$$(4 \times 3 \times 1 \times 1 \times 2 \times 1) \times 2 = 48$$

Cotação a atribuir: $9^{(*)} + 1 = 10$

(*) Expressão equivalente à correcta

Exemplo 2

$$4 \times 3 \times 1 \times 1 \times 2 \times 1 = 24$$

Cotação a atribuir: $5^{(*)} + 1 = 6$

(*) Expressão equivalente a $4!$

Exemplo 3

__ A R __ __ R A __

$$2! = 2$$

Cotação a atribuir: $2 + 1 = 3$

Exemplo 4

$$2! \times 2 + 8 \times 4! = 196$$

Cotação a atribuir: $0 + 0^{(*)} = 0$

(*) Ver nota 3, atrás.

Exemplo 5

$${}^4A_2 \times {}^2A_2 \times 4! = 576$$

Cotação a atribuir: $0 + 0^{(*)} = 0$

(*) Ver nota 3, atrás.

Expressão que dá o número pedido (ver notas 1 e 2)..... 9

Número pedido (ver nota 3) 1

Notas:

1. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da expressão que dá o número pedido, com a respectiva cotação a atribuir. Naturalmente, expressões equivalentes às indicadas deverão receber a mesma cotação.

 $6! - 5 \times 2 \times 4!$ (*) 9 $5 \times 2 \times 4!$ 7 $6! - 5 \times 4!$ 7 $6! - 5 \times 2$ 6 $6! - 2 \times 4!$ 5 $10 \times 2 \times 4!$ (**) 9 $10 \times 4!$ 7 10×2 5 $2 \times 4 \times 4! + 4 \times 3 \times 4!$ (***) 9 $2 \times 4 + 4 \times 3$ 5

(*) $5 \times 2 \times 4!$ é o número de maneiras de colocar as seis cartas, com o Rei ao lado da Dama. Portanto, $6! - 5 \times 2 \times 4!$ é o número de maneiras de colocar as seis cartas, de tal modo que o Rei não esteja ao lado da Dama.

(**) $10 \times 2 \times 4!$ é o número de maneiras de colocar as seis cartas, de tal modo que o Rei não esteja ao lado da Dama (10 é o número de posições possíveis para estas duas cartas).

(***) $2 \times 4 \times 4! + 4 \times 3 \times 4!$ é também o número de maneiras de colocar as seis cartas, de tal modo que o Rei não esteja ao lado da Dama (a primeira parcela é o número de maneiras de colocar as cartas, com o Rei numa das duas extremidades da fila, e a segunda parcela é o número de maneiras de colocar as cartas, com o Rei numa das quatro posições do meio da fila).

2. Se a expressão escrita pelo examinando não for uma das indicadas atrás, nem equivalente, cabe ao classificador decidir a classificação a atribuir, tomando como referência a lista apresentada. No sentido de a complementar, indicam-se a seguir algumas expressões que devem ser cotadas com 0 (zero) pontos:

$$4! + 2 \times 4!$$

$${}^6A_2 \times 4!$$

$$6 \times 5 \times 3 \times 3 \times 2 \times 1$$

3. O ponto relativo a esta etapa só deve ser atribuído se a primeira etapa não tiver sido cotada com 0 (zero) pontos.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$$\text{R} - \underbrace{\quad \quad \quad}_{\text{D}} \rightarrow 4$$

$$\text{-- R} - \underbrace{\quad \quad \quad}_{\text{D}} \rightarrow 3$$

$$\underbrace{\quad \quad \quad}_{\text{D}} - \text{R} - \underbrace{\quad \quad \quad}_{\text{D}} \rightarrow 3$$

$$\underbrace{\quad \quad \quad}_{\text{D}} - \text{R} - \underbrace{\quad \quad \quad}_{\text{D}} \rightarrow 3$$

$$\underbrace{\quad \quad \quad}_{\text{D}} - \text{R} - \quad \rightarrow 3$$

$$\underbrace{\quad \quad \quad}_{\text{D}} - \text{R} \rightarrow 4$$

$$4 + 3 + 3 + 3 + 3 + 4 = 20$$

$$\text{Cotação a atribuir: } 5^{(*)} + 1 = 6$$

(*) Expressão equivalente a $2 \times 4 + 4 \times 3$

Exemplo 2

$$\begin{array}{ccccccc} \text{R} & & \text{D} & & & & \\ & \text{R} & & \text{D} & & & \\ & & \text{R} & & \text{D} & & \\ & & & \text{R} & & \text{D} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \text{D} & & \text{R} & \\ & & & \text{D} & & \text{R} & \\ & & \text{D} & & \text{R} & & \\ \text{D} & & \text{R} & & & & \end{array}$$

$$4 \times 2 + 4 \times 2 = 16$$

$$\text{Cotação a atribuir: } 0 + 0^{(*)} = 0$$

(*) Ver nota 3, acima.

Substituir, na fórmula $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$,
os valores de $P(A|B)$ e de $P(A \cap B)$ (ver nota 1) 1

Determinar $P(B)$, resolvendo a equação anterior (ver nota 1)..... 3

Substituir, na fórmula $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,
os valores de $P(A \cup B)$, de $P(B)$ e de $P(A \cap B)$ (ver nota 2) 1

Determinar $P(A)$, resolvendo a equação anterior (ver nota 2)..... 3

Determinar o valor de $P(\bar{A})$ (ver nota 3)..... 2

Conclusão (ver nota 4)..... 2

Notas

1. Se o examinando utilizar uma fórmula incorrecta, para determinar $P(B)$, deverá ser atribuída a cotação de 0 (zero) pontos a estas duas etapas.
2. Se o examinando utilizar uma fórmula incorrecta, para determinar $P(A)$, deverá ser atribuída a cotação de 0 (zero) pontos a estas duas etapas.
3. Não se exige que o examinando explicita esta etapa, isto é, o examinando pode escrever de imediato a conclusão, a partir do valor de $P(A)$.
4. Os 2 pontos da conclusão só devem ser atribuídos no caso em que o examinando conclui, efectivamente, que A e \bar{A} são acontecimentos equiprováveis.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

Porque a probabilidade de acontecer A é a mesma coisa da probabilidade de não acontecer A , logo se designar pelo acontecimento contrário onde o $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Cotação a atribuir: 0

Exemplo 2

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \wedge \quad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$0,8 = P(A) + P(B) - 0,1 \quad \wedge \quad 0,25 = \frac{0,1}{P(B)}$$

$$P(A) = 0,5 \quad \wedge \quad P(B) = 0,4$$

$$P(A) = 0,5 = P(\bar{A})$$

Cotação a atribuir: $1 + 3 + 1 + 3 + 2 + 2 = 12$

Exemplo 3

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(B) = P(A|B) \times P(A \cap B)$$

$$P(B) = 0,025$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$0,8 = P(A) + 0,025 - 0,1$$

$$P(A) = 0,875$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0,125$$

Cotação a atribuir: $1^{(*)} + 0 + 1 + 3^{(**)} + 2^{(**)} + 0 = 7$

(*) O valor obtido para $P(B)$ evidencia que o examinando substituiu correctamente os valores de $P(A|B)$ e de $P(A \cap B)$.

(**) Etapas correctamente cumpridas, tendo em conta o valor obtido para $P(B)$ - ver critério geral 4.3

Exemplo 4

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad 0,25 = \frac{0,1}{P(B)} \quad P(B) = 0,4$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad 0,8 = P(A) + 0,4$$

$$P(A) = 0,4$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0,6$$

Logo, A e \bar{A} não são equiprováveis.

$$\text{Cotação a atribuir: } 1 + 3 + 0^{(*)} + 0^{(*)} + 2^{(**)} + 0^{(***)} = 6$$

(*) Ver a nota 2, atrás.

(**) Etapa correctamente cumprida, tendo em conta o valor obtido para $P(A)$ - ver critério geral 4.3.

(***) Ver a nota 4, atrás.

Exemplo 5

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \wedge \quad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$0,8 = P(A) + P(B) - 0,1 \quad \wedge \quad 0,25 = \frac{0,1}{P(B)}$$

$$0,9 - P(A) = P(B) \quad \wedge \quad 0,25 = \frac{0,1}{0,9 - P(A)}$$

$$0,225 - 0,25 P(A) = 0,1$$

$$0,15 - 0,25 P(A) = 0$$

$$P(A) = 0,6 \quad P(\bar{A}) = 0,4$$

$$\text{Cotação a atribuir: } 1 + 2^{(*)} + 1 + 3 + 2^{(**)} + 0^{(***)} = 9$$

$$(*) \text{ O examinando comete um erro ocasional de contas, ao resolver a equação } 0,25 = \frac{0,1}{0,9 - P(A)}$$

(**) Etapa correctamente cumprida, tendo em conta o valor obtido para $P(A)$ - ver critério geral 4.3.

(***) Ver a nota 4, atrás.

Apresentação da informação recolhida na utilização da calculadora (ver notas 1 e 3) 8

Composição (ver notas 2 e 3) 8

Notas:

1. Indica-se a seguir como deve ser cotada a apresentação da informação recolhida na utilização da calculadora:

Reproduzir correctamente o gráfico da função 2

Evidenciar que o zero da função é inferior a 60, indicando o seu valor ou assinalando, no eixo Ox , o ponto de abcissa 60 (ligeiramente à direita do ponto correspondente ao zero da função) 2

Reproduzir a recta de equação $y = 10$ e indicar as abcissas dos pontos de intersecção dos dois gráficos, que permitem responder afirmativamente à segunda condição do concurso 2

Reproduzir a recta de equação $y = 20$ ou assinalar o máximo absoluto da função 2

2. Na tabela seguinte, indica-se como deve ser cotada a composição.

Forma				
Conteúdo	Nível 1 (*)	Nível 2 (**)	Nível 3 (***)	
Analisa correctamente as três condições de apuramento.	8	7	6	
Analisa correctamente duas das condições de apuramento.	5	4	3	
Analisa correctamente uma das condições de apuramento.	3	2	1	

(*) **Nível 1** - Redacção clara, bem estruturada e sem erros (de sintaxe, de pontuação e de ortografia).

(**) **Nível 2** - Redacção satisfatória, em termos de clareza, razoavelmente estruturada, com alguns erros cuja gravidade não afecte a inteligibilidade.

(***) **Nível 3** - Redacção confusa, sem estruturação aparente, presença de erros graves, com perturbação frequente da inteligibilidade.

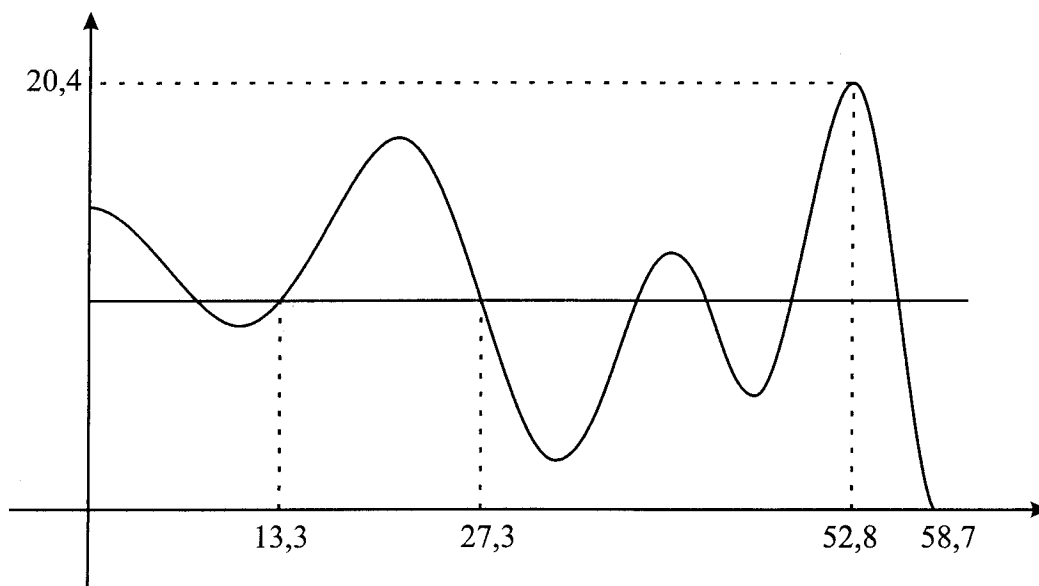
3. Pode acontecer que o examinando se engane a introduzir a expressão da função na calculadora, ou que esta tenha sido colocada em *modo grau*, obtendo, assim, um gráfico muito diferente do correcto. Nestas circunstâncias, a primeira etapa (apresentação da informação recolhida na utilização da calculadora) deve ser cotada com 0 (zero) pontos. Relativamente à composição, cabe ao classificador adaptar as indicações dadas na tabela anterior, tendo em conta os seguintes parâmetros:
- plausibilidade do gráfico obtido, face à situação em estudo;
 - correcção matemática das afirmações produzidas, face ao gráfico obtido;
 - grau de dificuldade da análise.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

Na figura estão representados o gráfico da função d e a recta de equação $y = 10$.

Assinalam-se as abcissas de dois dos pontos de intersecção das duas linhas, bem como o zero da função d e as coordenadas do ponto correspondente ao máximo.

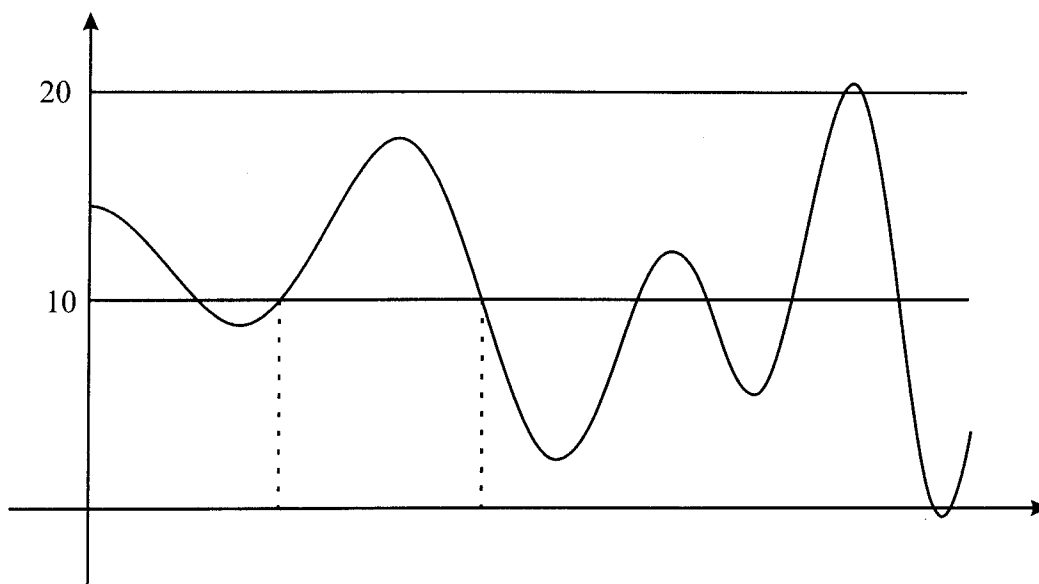


Da análise do gráfico, podemos concluir que a Rita deve ser apurada para a final, pois o seu papagaio permaneceu no ar durante 58,7 segundos, após o instante indicado pelo júri. A primeira condição está, portanto, satisfeita. Entre os instantes 13,3 e 27,3, o papagaio esteve acima dos 10 metros, pelo que esteve cerca de 14 segundos seguidos acima desta altura. Assim, a segunda condição está também satisfeita. Como o máximo da função é 20,4, o papagaio ultrapassou os vinte metros de altura. As três condições de apuramento estão todas satisfeitas.

Cotação a atribuir: $8(2 + 2 + 2 + 2) + 8^{(*)} = 16$

(*) O examinando analisa correctamente as três condições de apuramento, numa redacção clara, bem estruturada e sem erros (de sintaxe, de pontuação e de ortografia).

Exemplo 2



A condição de permanecer pelo menos 12 segundos acima dos dez metros foi superada logo aos 13,3 s até aos 27,3 s, pois como se vê permaneceu acima dos 10 metros 14 segundos. A condição de ultrapassar os 20 metros foi satisfeita, como está evidenciado no gráfico. Portanto, a Rita deve ser apurada para a final.

Cotação a atribuir: $5(1^{(*)} + 0 + 2^{(**)} + 2) + 4^{(***)} = 9$

(*) O gráfico tem pontos de ordenada negativa e de ordenada positiva, à direita do ponto correspondente ao zero da função (a partir deste ponto, a função é nula).

(**) Apesar de, no gráfico, não serem indicadas as abcissas dos pontos de intersecção do gráfico da função com a recta de equação $y = 10$, o examinando refere esses valores no texto.

(***) O examinando analisa correctamente duas das condições de apuramento, numa redacção satisfatória, em termos de clareza, razoavelmente estruturada, com alguns erros cuja gravidade não afecta a inteligibilidade.

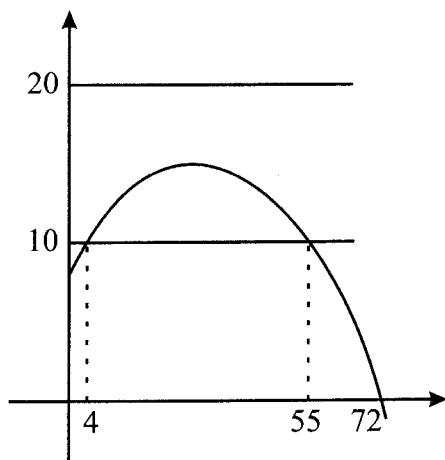
Exemplo 3

A Rita deve ser apurada, pois o papagaio da Rita manteve-se acima dos 10 metros no intervalo aproximado [13,27] e o papagaio ultrapassou os 20 metros aproximadamente no instante $t = 53$, tendo em seguida caído antes de ter passado 1 minuto.

Cotação a atribuir: $0 + 7^{(*)} = 7$

(*) O examinando analisa correctamente as três condições de apuramento, numa redacção satisfatória e razoavelmente estruturada, existindo evidência, pelos valores apresentados, de que a calculadora foi utilizada.

Exemplo 4



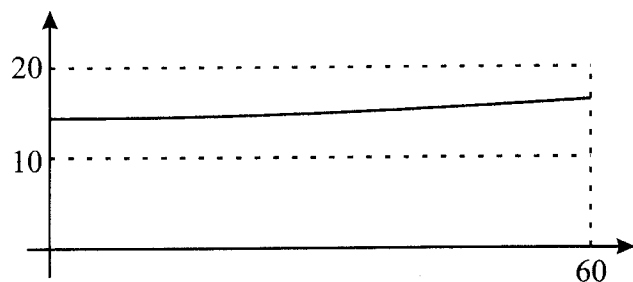
O gráfico mostra que a Rita não deve ser apurada. A Rita apenas cumpriu uma das condições, pois o papagaio permaneceu acima dos 10 metros durante 51 segundos. O papagaio nunca conseguiu ultrapassar os vinte metros e caiu depois de ter passado 1 minuto.

Cotação a atribuir: $0^{(*)} + 6^{(**)} = 6$

(*) Ver a nota 3, atrás.

(**) Tendo em conta o gráfico obtido, o examinando analisa correctamente as três condições de apuramento, numa redacção clara, bem estruturada e sem erros. Considera-se, no entanto, que o grau de dificuldade diminuiu um pouco, na medida em que este gráfico é mais fácil de analisar do que o gráfico correcto (ver a nota 3, atrás, e o critério geral 4.4).

Exemplo 5



A Rita não deve ser apurada. O papagaio permaneceu acima dos 10 metros durante o tempo todo, mas não ultrapassou os vinte metros.

Cotação a atribuir: $0^{(*)} + 3^{(**)} = 3$

(*) Ver a nota 3, atrás.

(**) Tendo em conta o gráfico obtido, o examinando analisa correctamente duas das três condições de apuramento, numa redacção clara, bem estruturada e sem erros. Considera-se, no entanto, que o grau de dificuldade diminuiu um pouco, na medida em que este gráfico é mais fácil de analisar do que o gráfico correcto (ver a nota 3, atrás, e o critério geral 4.4).